

HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT – HÀM SỐ LŨY THỪA

Khi các biểu thức có nghĩa, ta có các công thức sau		ĐẠO HÀM	
		HÀM SỐ CƠ BẢN	HÀM SỐ HỢP
a^n có nghĩa $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \text{ thì } a \in \mathbb{R} \\ n = 0 \vee n \in \mathbb{Z}^- \text{ thì } a \neq 0 \\ n \notin \mathbb{Z} \text{ thì } a > 0 \end{cases}$ $a^0 = 1$ $a^1 = a$ $(a)^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $a^u = b \Leftrightarrow u = \log_a b$ $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$ $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$ (nếu $a > 1$) $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$ (nếu $0 < a < 1$)	$\log_a b$ có nghĩa $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $a^{\log_a b} = b, a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$ $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ $\Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c > 0$ $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$ (nếu $a > 1$) $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow 0 < b < c$ (nếu $0 < a < 1$) $\log_a b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, b > 1 \\ 0 < a, b < 1 \end{cases}$ - Khi $a = 10$ ta có logarit thập phân. Kí hiệu: $\log b \equiv \lg b$ - Khi $a = e$ ta có logarit Nepe. Kí hiệu: $\ln b$	$C' = 0, x' = 1$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$ $(\sin u)' = u' \cos u$ $(\cos u)' = -u' \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$ $(e^u)' = u' e^u$ $(a^u)' = u' a^u \cdot \ln a$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
		$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(ku)' = k \cdot u'$ $(uv)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	

TẬP XÁC ĐỊNH & TẬP GIÁ TRỊ

1/ Hàm số mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$):

Ví dụ: Tìm tập xác định của

a/ $y = 2^{x-5}$ có TXĐ là $D = \mathbb{R}$

b/ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$ có TXĐ là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Tập giá trị: $(0, +\infty)$

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x > 0$

TXĐ: $D = (0, +\infty)$

Tập giá trị: $\mathbb{R}$

2/ Hàm số logarit $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$):

Ví dụ: Tìm tập xác định của

a/ $y = \log_2(x+5)$ xác định khi $x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

TXĐ: $D = (-5, +\infty)$

b/ $y = \ln \frac{x+5}{2-x}$ xác định khi $\frac{x+5}{2-x} > 0 \Leftrightarrow -5 < x < 2$

TXĐ: $D = (-5, 2)$

c/ $y = \log^2 \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ xác định khi $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 3$

TXĐ: $D = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

3/ Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$:

Ví dụ: Tìm tập xác định của

a/ $y = (x-2)^{2020}$ có TXĐ là $\mathbb{R}$

b/ $y = (x-2)^{-20}$ xác định khi $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

c/ $y = (x-2)^{\sqrt{2}}$ xác định khi $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

TXĐ: $D = (2, +\infty)$

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N}^* \text{ thì } x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R} \\ \alpha = 0 \vee \alpha \in \mathbb{Z}^- \text{ thì } x \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \alpha \notin \mathbb{Z} \text{ thì } x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty) \end{cases}$$

4/ Hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$):

Ví dụ: Tìm tập xác định của

a/ $y = \sqrt[5]{\frac{2}{x-3}}$ xác định khi $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

b/ $y = \sqrt[4]{2x^2 - 3x - 5}$ xác định khi $2x^2 - 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq \frac{5}{2}$

TXĐ: $D = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

n chẵn thì $x \geq 0 \Rightarrow D = [0, +\infty)$

n lẻ thì $x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

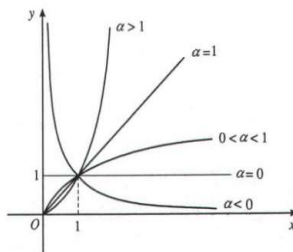
ĐỒ THỊ: HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT – HÀM SỐ LŨY THỪA

Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0, +\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$y = x^\alpha \ (\alpha > 0)$	$y = x^\alpha \ (\alpha < 0)$																		
1. Tập xác định: $(0, +\infty)$ 2. Sự biến thiên $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$ Tiệm cận: không có. 3. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> 0 $\nearrow$ $+\infty$	x	0	$+\infty$	y'		+	y		$+\infty$	1. Tập xác định: $(0, +\infty)$ 2. Sự biến thiên $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$ Tiệm cận: Ox là TCN. Oy là TCĐ. 3. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table> $+\infty \searrow$ 0	x	0	$+\infty$	y'		-	y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'		+																	
y		$+\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
y'		-																	
y	$+\infty$	0																	

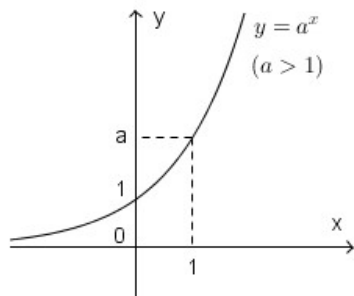
Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1,1)$



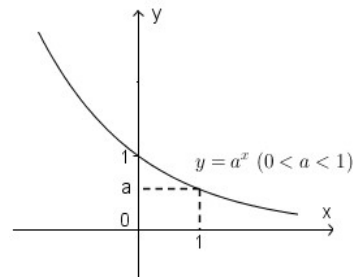
Khảo sát hàm số mũ $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

$y = a^x \ (a > 1)$	$y = a^x \ (0 < a < 1)$																														
1. Tập xác định: $\mathbb{R}$ 2. Sự biến thiên. $y' = a^x \ln a > 0, \forall x$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang. 3. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'			+		y	0	1	a	$+\infty$	1. Tập xác định: $\mathbb{R}$ 2. Sự biến thiên. $y' = a^x \ln a < 0, \forall x$ Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ Tiệm cận: Ox là tiệm cận ngang. 3. Bảng biến thiên. <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>a</td><td>0</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'			-		y	$+\infty$	1	a	0
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'			+																												
y	0	1	a	$+\infty$																											
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'			-																												
y	$+\infty$	1	a	0																											

Đồ thị như hình sau.



Đồ thị như hình sau.



Khảo sát hàm số $y = \log_a x$:

$a > 1$	$0 < a < 1$								
TXĐ: $D = (0, +\infty)$	TXĐ: $D = (0, +\infty)$								
$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ $\Rightarrow$ TCĐ: $x = 0 \ (x \rightarrow 0^+)$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ $\Rightarrow$ TCĐ: $x = 0 \ (x \rightarrow 0^+)$								
$y' = \frac{1}{x \ln a} > 0 \ \forall x \in D$ $\Rightarrow$ Hàm số tăng trên D	$y' = \frac{1}{x \ln a} < 0 \ \forall x \in D$ $\Rightarrow$ Hàm số giảm trên D								
BBT	BBT								
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="2"> </td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	+		y		
x	0	$+\infty$							
y'	+								
y									

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TXĐ

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = (2x - x^2)^\pi$ là

- A. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $[0; 2]$. D. $(0; 2)$.

Câu 2. Điều kiện xác định của hàm số $y = (x^2 - 4)^{-5}$ là

- A. $x \geq 0$. B. $x \neq \pm 2$. C. $x \geq 2$. D. $x \neq 0$.

Câu 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-3} + x + 1$.

- A. $D = [-2; 2]$. B. $D = [-2; 2] \setminus \{-1; 1\}$.
C. $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. D. $D = (-2; 2) \setminus \{1\}$.

Câu 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + x - 2$.

- A. $D = (-1; 1)$. B. $D = (-1; 0) \cup (1; +\infty)$
C. $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{3}{5}} + (x - 3)^{-4}$ là

- A. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $D = (-\infty; +\infty) \setminus (1; 2)$.
C. $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{3\}$. D. $D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 6. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_{2019}(4 - x^2) + (2x - 3)^{-20}$.

- A. $D = \left[-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right]$. B. $D = \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.
C. $D = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. D. $D = (-2; 2)$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{5}}$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 8. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (x^2 - 3x - 4)^{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 4\}$. B. $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.
C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Câu 9. Tìm tập xác định D của hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{5}}$.

- A. $D = [-2; 2]$. B. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. C. $D = (-2; 2)$. D. $D = (-\infty; +\infty)$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = (x + 3)^{\frac{3}{2}} - \sqrt[4]{5 - x}$ là

- A. $D = (-3; 5]$. B. $D = (-3; +\infty] \setminus \{5\}$.
C. $D = (-3; 5)$. D. $D = (-3; +\infty)$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. 5. B. 4. C. 7. D. 9.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $f(x) = \left(\frac{4x - 3x^2}{2x^2 + 3x + 1} \right)^{\frac{-2}{3}}$ là

- A. $x \in \left[-1; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[0; \frac{4}{3} \right]$. B. $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0 \right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty \right)$.
C. $x \in \left(-1; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(0; \frac{4}{3} \right)$. D. $x \in \left(-1; \frac{4}{3} \right)$.

Câu 13. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y = (x^2 - 3x + 1 - m)^{\frac{2}{3}}$ xác định với mọi giá trị của x là

- A. $m < -\frac{5}{4}$. B. $m \leq -\frac{5}{4}$. C. $m > -\frac{5}{4}$. D. $m \geq -\frac{5}{4}$.

Câu 14. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y = (x^2 + mx - 1)^{2\sin\frac{\pi}{4}}$ xác định với mọi giá trị của $x \in (1; +\infty)$ là

- A. $m > 0$. B. $m \leq 0$. C. $m > -1$. D. $m \geq -1$.

Câu 15. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (x^2 - mx + 1 - m)^{1-\sqrt{3}}$ có tập xác định bằng $\mathbb{R}$ là

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 16. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (x^3 + mx^2 + mx - 2)^{\sqrt{5}}$ xác định với mọi giá trị của $x \in (2; +\infty)$ là

- A. $m > -1$. B. $m \leq -1$. C. $m > 1$. D. $m \geq -1$.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $f(x) = (2x^2 + mx + 2)^{\frac{3}{2}}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A.** 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2m+1-x}} + (x-m)^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ xác định trên $(2; 3)$.

- A.** $1 \leq m \leq 2$. **B.** $1 < m \leq 2$. **C.** $-1 < m < 2$. **D.** $-1 \leq m \leq 2$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \left(x^2 + \frac{2}{x} - m\right)^{\frac{-1}{3}}$ xác định với mọi $x \in (0, +\infty)$?

- A.** $m \leq 3$. **B.** $m < 3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m \geq 3$.